数理解析研究所講究録 1473 巻 2006 年 62-73

ルート系に付随する Calogero 模型と Ruijsenaars 模型

名古屋大学・多元数理科学研究科　小森 靖 (Yasushi Komori)
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

1 はじめに

Calogero 系とは直線上または円周上の一次元可積分系である．最初の模型が導入されて以来，さまざまな研究者によって拡張がなされてきたが，それは有理型から三角関数型，楕円型への拡張，ルート系に付随する拡張，そして Ruijsenaars による拡張，と分けることができる．このうち Ruijsenaars による拡張は他の拡張とは大きく異なり別の模型と考えることが出来るため，ここでは大きく 2 つに分けて Calogero 系と Ruijsenaars 系と呼ぶことにした．これらの模型は極限によってつながっており，楕円型 Ruijsenaars 系はその頂点にいる．またここでは扱わないが，その極限の中には戸田模型も含まれている．

本稿では，これらの模型についてハミルトニアンやこれまでの主な結果を挙げ，さらに最近の話題である作用素の拡張と古典系の可積分性について解説したい．

§2 ではルート系に付随する古典および量子，Calogero 系および Ruijsenaars 系の各ハミルトニアンと保存量について説明する．§3 では量子 Ruijsenaars 系において可換な作用素の拡張を行う．それによるとルート系のランクの 3 倍の代数的に独立な可換な作用素が構成できる．一般には同時固有関数の存在は不明であるが，限定された状況では構成できることを §4 で説明する．これは Ruijsenaars 系の差分作用素が Gauss の超幾何微分方程式の拡張とみなすことができることを用いている．この節の結果は野海氏[*1]との共同研究による．§5 では古典 Ruijsenaars 系の可積分性を示す．この方法は van Diejen によるもので，量子系の可換差分作用素から対応する古典系の保存量を導き出すものである．これと微分形式の一次独立性をあわせることによって古典系の可積分性が結論付けられる．

2 模型について

まず順に古典 Calogero 系，古典 Ruijsenaars 系，量子 Calogero 系，量子 Ruijsenaars 系の各々のハミルトニアンについて説明する．A_{N-1}, BC_N 型については Ruijsenaars による概説 [14] がある．

2.1 古典 Calogero 系

• (A_{N-1} 型) Calogero や Moser によって導入された模型であり，その後さまざまな類似模型の基礎となった．詳細については [16] などを参照．

g を結合定数とし，N 個の粒子の座標は $M=\mathbb{R}^N$ または $M=\mathbb{R}^N/2\omega_1\mathbb{Z}^N$ に値をとるとすると有理型，三

[*1] 神戸大学・大学院自然科学研究科 野海 正俊 (Masatoshi Noumi) *Department of Mathematics, Graduate School of Science and Technology, Kobe University*

角関数型, 楕円型のハミルトニアンはそれぞれ

$$H_1 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} p_j^2 + \sum_{1\le j<k\le N} \frac{g^2}{(x_j-x_k)^2}\Big(+\frac{\omega}{2}\sum_{j=1}^{N} x_j^2\Big), \tag{2.1}$$

$$H_1 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} p_j^2 + \sum_{1\le j<k\le N} \frac{g^2}{\sin^2 \frac{\pi}{2\omega_1}(x_j-x_k)}, \tag{2.2}$$

$$H_1 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} p_j^2 + \sum_{1\le j<k\le N} g^2\wp(x_j-x_k) \tag{2.3}$$

で与えられる. ここで $\wp(x)=\wp(x;\omega_1,\omega_2)$ は Weierstrass の $\wp$ 関数で $\omega_1, i\omega_2 \in \mathbb{R}$ は半周期をあらわす. このとき高次の保存量 H_n が存在して $\{H_i,H_j\}=0$ となることが Lax pair を用いて示される.

• (BC_N 型) Inozemtsev [6] によって導入され Lax pair が与えられているが, 保存量の包含性は示されていない. しかし可積分性は量子系から従う.

g を相互作用の結合定数, g_t $(t=0,1,2,3)$ を外場との相互作用の結合定数とするとハミルトニアンは以下で与えられる.

$$H_1 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} p_j^2 + \sum_{1\le j<k\le N} g^2\big(\wp(x_j-x_k)+\wp(x_j+x_k)\big) + \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{3} g_t^2 \sum_{j=1}^{N}\wp(x_j+\omega_t), \tag{2.4}$$

$\omega_0=0$, $\omega_3=-\omega_1-\omega_2$. 周期を無限大にとばす極限を取ることによって三角関数型, 有理型の模型も得られる.

• (一般ルート X_N 型) Olshanetskey と Perelomov [16] によって導入されたが, 可積分性の証明は Khastgir と R. Sasaki [7] による. 結合定数は $g_\alpha = g_{|\alpha|}$ のようにルートの長さのみに依存するとし, Δ_+ を正のルート全体, 座標は $M=(\mathbb{R}\otimes Q^\vee)/2\omega_1 P^\vee \simeq \mathbb{T}^N$ に値をとるものとすると, ハミルトニアンは

$$H_1 = \frac{1}{2}\langle p,p\rangle + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_+} g_\alpha^2\langle\alpha,\alpha\rangle\wp(\langle x,\alpha\rangle;\omega_1,\omega_2) \tag{2.5}$$

で与えられる. またアフィンルート系に対応して twisted type と呼ばれる模型についても可積分性が示されている.

2.2 古典 Ruijsenaars 系

Ruijsenaars 系は Ruijsenaars-Schneider [21] によって "相対論的類似" として導入された模型であり "光速" $c=1/\beta$ が無限大の極限で Calogero 系へ帰着される.

• (A_{N-1} 型) Ruijsenaars と Schneider によって導入された. ハミルトニアンは

$$H_1 = \sum_{j=1}^{N} e^{\beta p_j}\prod_{k\neq j} v(x_j-x_k,\mu), \tag{2.6}$$

$$v(x,\mu) = \Big(\frac{\sigma(x+\mu)\sigma(x-\mu)}{\sigma(x)\sigma(x)}\Big)^{1/2} \tag{2.7}$$

であり, 一般に

$$H_n = \sum_{\substack{J\subset\{1,\dots,N\}\\ |J|=n}} \Big(\prod_{j\in J} e^{\beta p_j}\Big)\Big(\prod_{\substack{j\in J\\ k\in J^c}} v(x_j-x_k,\mu)\Big) \tag{2.8}$$

とおくと $\{H_i, H_j\} = 0$ となる．証明は量子系の証明と同時に与えられた [20]．ここで結合定数 μ は Calogero 模型の結合定数 g と $\mu = i\beta g$ という関係にある．A_{N-1} 型のみ Lax pair が Ruijsenaars によって構成されている．

Remark 1. Ruijsenaars 系のハミルトニアンは見慣れない形をしているが Ruijsenaars 系と Calogero 系の対応は

$$H_1^{\mathrm{R}} = N + P\beta + H_1^{\mathrm{C}}\beta^2 + O(\beta^3) \tag{2.9}$$

で与えられる．自由一粒子系 $(g=0)$ の場合でみると見易い．

$$H^{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}p^2, \qquad P^{\mathrm{C}} = p, \tag{2.10}$$

$$H^{\mathrm{R}} = e^{\beta p} = 1 + P^{\mathrm{C}}\beta + H^{\mathrm{C}}\beta^2 + O(\beta^3). \tag{2.11}$$

• (BC_N 型) van Diejen が導入した Inozemtsev 系の Ruijsenaars 型の変形である [22]．結合定数は約 2 倍の 9 個になる．二粒子系で結合定数が 8 個の場合, van Diejen は量子系の可積分性を示し，それを基に古典系の可積分性を示した．Lax pair など, 量子系の結果を利用しない系統的な証明は知られていない．ハミルトニアンは以下で与えられる．(μ, μ_t, μ_t' $(t = 0,1,2,3)$: const.)

$$\begin{aligned} H_1 = \sum_{j=1}^{N}(e^{\beta p_j} + e^{-\beta p_j})u(x_j)\prod_{k\neq j} v(x_j - x_k)v(x_j + x_k) \\ + \sum_{t=0}^{3}\frac{2}{\sigma(\mu)^2}\left(\prod_{s=0}^{3}\sigma_s(\mu_{\pi_t(s)})\sigma_s(\mu'_{\pi_t(s)})\right)\prod_{j=1}^{N} v_t(x_j), \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$u(x) = \left(\prod_{t=0}^{3}\frac{\sigma_t(x+\mu_t)\sigma_t(x-\mu_t)}{\sigma_t(x)\sigma_t(x)}\frac{\sigma_t(x+\mu_t')\sigma_t(x-\mu_t')}{\sigma_t(x)\sigma_t(x)}\right)^{1/2}, \tag{2.13}$$

$$v_t(x) = \frac{\sigma_t(x+\mu)\sigma_t(x-\mu)}{\sigma_t(x)\sigma_t(x)}. \tag{2.14}$$

ここで $\pi_0 = \mathrm{id}$, $\pi_1 = (01)(23)$, $\pi_2 = (02)(13)$, $\pi_3 = (03)(12) \in \mathfrak{S}_4$. 高次の保存量の具体形は, 量子系の場合一つの因子を除いて得られている [13].

• (一般ルート X_N 型) 量子系の作用素の可換性 [11] から対応する古典系の保存量の可換性が得られる．詳しくは §5 で扱うが, この方法は van Diejen [22] による．結合定数はルートの長さのみに依存するとし $(\mu_\alpha = i\beta g_\alpha)$, λ を minuscule coweight (E_8, F_4, G_2, BC_N にはない), $\theta^\vee$ を quasi-minuscule coweight (θ : maximal root) とすると "最低次" の保存量は以下で与えられる．

$$H_{-\lambda} = \frac{1}{|W_\lambda|}\sum_{w\in W} e^{\beta\langle p, w\lambda\rangle}\prod_{\substack{\alpha\in\Delta_+\\ \langle\lambda,\alpha\rangle=1}} v(\langle x, w\alpha\rangle, \mu_\alpha) = \frac{|W|}{|W_\lambda|} + \frac{\langle\lambda,\lambda\rangle}{N}H^{\mathrm{C}}\beta^2 + O(\beta^3), \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} H_{-\theta^\vee} = \frac{1}{|W_{\theta^\vee}|}\sum_{w\in W} e^{\beta\langle p, w\theta^\vee\rangle}\prod_{\substack{\alpha\in\Delta_+\\ \langle\theta^\vee,\alpha\rangle>0}} v(\langle x, w\alpha\rangle, \mu_\alpha)^{\langle\theta^\vee,\alpha\rangle} \\ + \frac{\sigma(\mu_\theta)}{\sigma(\langle\rho_\mu, \theta^\vee\rangle)}\sum_{w\in W} u(\langle x, w\theta\rangle, -\langle\rho_\mu, \theta^\vee\rangle)\prod_{\substack{\alpha\in\Delta_+\\ \langle\theta^\vee,\alpha\rangle>0}} u(\langle x, w\alpha\rangle, \mu_\alpha), \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$u(x,\mu) = \frac{\sigma(x+\mu)}{\sigma(x)}, \quad v(x,\mu) = \left(\frac{\sigma(x+\mu)\sigma(x-\mu)}{\sigma(x)\sigma(x)}\right)^{1/2} \tag{2.17}$$

$$\rho_\mu = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\in\Delta_+} \mu_\alpha \alpha. \tag{2.18}$$

ここでは簡単のため BC_N 型の特別な場合を挙げたが, 一般の形 (2.12) も全く同様に扱える.

Remark 2. A_{N-1} 型ではすべての fundamental coweight λ_i は minuscule であり, 保存量はすべて (2.15) で与えられる. また β による展開第二項目は Calogero 系のハミルトニアンになっている.

2.3 量子 Calogero 系

• (A_{N-1} 型) Calogero によって導入された. ハミルトニアンは対応する古典系を正準量子化 ($p \to \hat{p} = -i\hbar\partial$) することによって得られる.

$$H_1 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \hat{p}_j^2 + \sum_{1\le j<k\le N} g(g-\hbar)\wp(x_j - x_k) \tag{2.19}$$

この作用素に対して高次の微分作用素 H_n が存在して $[H_i, H_j] = 0$ となる. 具体形は他の古典ルート系に対するものとともに [18] で与えられている.

• (BC_N 型) Inozemtsev 模型の量子系である. ハミルトニアンは

$$H_1 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \hat{p}_j^2 + g(g-\hbar) \sum_{1\le j<k\le N} \left(\wp(x_j - x_k) + \wp(x_j + x_k)\right) + \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{3} g_t(g_t-\hbar)\sum_{j=1}^{N}\wp(x_j+\omega_t) \tag{2.20}$$

であり, 可換な微分作用素とともに [15, 17, 18] で与えられている. B_2 の場合はさらに特別なものがあることも論じられている.

• (一般ルート X_N 型) Cherednik は一般ルート系において有理型 (三角関数型) は有理型 (退化した) Double Affine Hecke Algebra (DAHA) を用いて構成し, 一方楕円型の模型は退化した DAHA の無限和を用いて構成した [1, 2]. ($g_\alpha = g_{|\alpha|}$: const., Δ_+ : positive roots)

$$H_1 = \frac{1}{2}\langle\hat{p},\hat{p}\rangle + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_+} g_\alpha(g_\alpha - \hbar)\langle\alpha,\alpha\rangle\wp(\langle x,\alpha\rangle) \tag{2.21}$$

三角関数型は退化した DAHA の構造を用いて固有関数の完全系の構成も行われている. 楕円型の作用素は古典ルート系の場合は [18] でも調べられており, 適当な仮定の下ではこれら以外にないことが示されている. 楕円型の固有関数は特殊な場合 (Dittrich-Inozemtsev, Felder-Varchenko), 摂動 (Takemura-Y. K.), 形式解 (Langmann) などがあるが, 完全には分かっていない.

2.4 量子 Ruijsenaars 系

• (A_{N-1} 型) 古典系導入のすぐ後で Ruijsenaars がその量子系を考察した [20]. この場合単純な置き換え $p_j \to \hat{p}_j$ では自己共役性が失われてしまう. そこで古典系のハミルトニアン

$$H_1 = \sum_{j=1}^{N} e^{\beta p_j} \prod_{k \neq j} \left(\frac{\sigma(x_j - x_k + \mu)\sigma(x_j - x_k - \mu)}{\sigma(x_j - x_k)\sigma(x_j - x_k)} \right)^{1/2} \tag{2.22}$$

に対して形式的に自己共役なるように

$$H_1 = \sum_{j=1}^{N} \prod_{k \neq j} \left(\frac{\sigma(x_j - x_k + \mu)}{\sigma(x_j - x_k)} \right)^{1/2} e^{\beta \hat{p}_j} \prod_{k \neq j} \left(\frac{\sigma(x_j - x_k - \mu)}{\sigma(x_j - x_k)} \right)^{1/2} \tag{2.23}$$

とおく. ここで $T_j(-i\hbar\beta) = e^{-i\hbar\beta\partial_j} = e^{\beta\hat{p}_j}$ は差分作用素であり

$$(T_j(-i\hbar\beta)f)(x) := f(x_1, \ldots, x_j - i\hbar\beta, \ldots, x_N) \tag{2.24}$$

と定義する. 高次の保存量に対しても同様に定義すると $[H_i, H_j] = 0$ となることが示される. このままでは扱いにくいため楕円ガンマ関数の積からなる関数 W を用いて

$$Y_i = W^{-1} H_i W, \quad [Y_i, Y_j] = 0 \tag{2.25}$$

$$Y_1 = \sum_{j=1}^{N} \left(\prod_{k \neq j} \frac{\sigma(x_j - x_k + \mu)}{\sigma(x_j - x_k)} \right) T_j(-i\hbar\beta) \tag{2.26}$$

を考察することが多い. 三角関数型の場合は Macdonald 作用素と呼ばれている.

• (BC_N 型) Ruijsenaars 模型の BC_N 類似である. van Diejen [22] によって導入され, 可換な作用素は [12] で構成された. ハミルトニアンを相似変換したものは

$$\begin{aligned} Y_1 = \sum_{\substack{1 \le j \le N \\ \epsilon = \pm 1}} \Big(u(\epsilon x_j) \prod_{k \neq j} v(\epsilon x_j - x_k) v(\epsilon x_j + x_k) \Big) e^{-\epsilon\beta\hat{p}_j} \\ + \sum_{t=0}^{3} \frac{2}{\sigma(\mu)\sigma(\mu - 2\gamma)} \left(\prod_{s=0}^{3} \sigma_s(\mu_{\pi_t(s)} - \gamma) \sigma_s(\mu'_{\pi_t(s)}) \right) \prod_{j=1}^{N} v_t(x_j), \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$v(x) = \frac{\sigma(\mu + x)}{\sigma(x)}, \tag{2.28}$$

$$u(x) = \prod_{t=0}^{3} \frac{\sigma_t(\mu_t + x)}{\sigma_t(x)} \frac{\sigma_t(\mu'_t + \gamma + x)}{\sigma_t(x + \gamma)}, \tag{2.29}$$

$$v_t(x) = \frac{\sigma_t(\mu - \gamma + x)}{\sigma_t(-\gamma + x)} \frac{\sigma_t(\mu - \gamma - x)}{\sigma_t(-\gamma - x)}, \tag{2.30}$$

$\gamma = i\beta\hbar/2$ で与えられる. 三角関数型で適当に 4 パラメータにしたものは Macdonald-Koornwinder 作用素として知られており, 直交多項式の固有関数系を持つ.

• (一般ルート X_N 型) 三角関数型は Macdonald によって導入され Cherednik によって固有関数の構成や内積値の計算が Double Affine Hecke Algebra という代数構造を基に解決された [2]. 楕円型は Ruijsenaars によるが, 三角関数型の場合ほど解明されていない. ハミルトニアンは結合定数を $\mu_\alpha = i\beta g_\alpha$ とすると

$$Y^{-\lambda} = \frac{1}{|W_\lambda|}\sum_{w\in W}\left(\prod_{\substack{\alpha\in\Delta_+\\ \langle\lambda,\alpha\rangle=1}} \frac{\sigma(\langle x, w\alpha\rangle + \mu_\alpha)}{\sigma(\langle x, w\alpha\rangle)}\right) T_{w\lambda}(-i\hbar\beta), \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned} Y^{-\theta^\vee} = {} & \frac{1}{|W_{\theta^\vee}|}\sum_{w\in W}\left(\prod_{\substack{\alpha\in\Delta_+\\ \langle\theta^\vee,\alpha\rangle>0}} \frac{\sigma(\langle x, w\alpha\rangle + \mu_\alpha)}{\sigma(\langle x, w\alpha\rangle)}\right)\times \\ & \left(\frac{\sigma(\langle x, w\theta\rangle + \mu_\theta - i\hbar\beta)}{\sigma(\langle x, w\theta\rangle - i\hbar\beta)} T_{w\theta^\vee}(-i\hbar\beta) + \frac{\sigma(\mu_\theta)}{\sigma(\langle\rho_\mu, \theta^\vee\rangle)} \frac{\sigma(\langle x, w\theta\rangle - \langle\rho_\mu, \theta^\vee\rangle - i\hbar\beta)}{\sigma(\langle x, w\theta\rangle - i\hbar\beta)}\right) \end{aligned} \tag{2.32}$$

となる. 可換な作用素の構成は Root Algebra によってなされ [11], アフィンリー代数の指標空間へ作用することは A_N, C_2 の場合 Hasegawa-Ikeda-Kikuchi [4, 5] により, また一般の場合は [11] で示された. 最低次の作用素の自己共役性については [10] で議論されている.

これらの作用素の拡張と, BC_1 の特別な場合における楕円超幾何積分による固有関数の構成 [9] については次節以降で説明する.

3 一般化

前節で導入した X_N 型量子 Ruijsenaars 系はそのランクと同じ N 個の代数的に独立な可換差分作用素からなるが, 少し変形すると $3N$ 個の可換差分作用素に拡張される. すなわち

$$[Y_j^{(k)}, Y_m^{(n)}] = 0, \quad (j, m = 1, \ldots, N,\ k, n = 1, 2, 3) \tag{3.1}$$

となる. 例えば A_{N-1} 型の場合, 最低次の作用素は

$$Y_1^{(1)} = \sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{N} e^{\nu_1(x_j - x_k)} \frac{\sigma(x_j - x_k - \mu_1; \omega_2, \omega_3)}{\sigma(x_j - x_k; \omega_2, \omega_3)}\right) T_j(2\omega_1), \tag{3.2}$$

$$Y_1^{(2)} = \sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{N} e^{\nu_2(x_j - x_k)} \frac{\sigma(x_j - x_k - \mu_2; \omega_1, \omega_3)}{\sigma(x_j - x_k; \omega_1, \omega_3)}\right) T_j(2\omega_2), \tag{3.3}$$

$$Y_1^{(3)} = \sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{N} e^{\nu_3(x_j - x_k)} \frac{\sigma(x_j - x_k - \mu_3; \omega_1, \omega_2)}{\sigma(x_j - x_k; \omega_1, \omega_2)}\right) T_j(2\omega_3) \tag{3.4}$$

で与えられる. ここで $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbb{C}$ は $\Im\omega_i/\omega_j \neq 0$ となる任意定数であり, $\sigma(x; \omega, \omega')$ は Weierstrass σ 関数である. また ν_1, ν_2, ν_3, μ_1, μ_2, μ_3 は 3 個の制限方程式を満たすようにとる. 詳しくは [9] を参照.

Remark 3. $Y_j^{(k)}$ は $\mathbb{Q}[W \ltimes P^3]$ (3 extended affine Weyl group) の変形を考えたとき, 平行移動からなるランク $3N$ の可換部分群の生成元に対応しているとみなせる. またこれは量子系特有の性質であり, 古典極限 $\hbar \to 0$ や Calogero 極限 $\beta \to 0$ では消滅してしまう.

このように一般に可換差分作用素が増える理由について，ランク $2N$ になってしまうが三角関数極限で説明する．三角関数の場合，可換差分作用素は Macdonald 作用素として知られているが主に研究されているのは周期的境界条件である．これは

$$M_1^{(1)} = \sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\frac{\sin(x_j - x_k - \mu)}{\sin(x_j - x_k)}\right)T_j(\delta), \tag{3.5}$$

$$M_1^{(2)} = \sum_{j=1}^{N} T_j(\pi), \quad (\text{境界条件}) \tag{3.6}$$

等とおいて $M_j^{(2)}$ の特別な固有値における $M_m^{(1)}$ の固有関数を考えているのと同じである．このとき $[M_j^{(k)}, M_m^{(n)}] = 0$, $(k, n = 1, 2)$．したがって境界条件を変形して

$$M_1^{(1)} = \sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\frac{\sin(x_j - x_k - \mu_1)}{\sin(x_j - x_k)}\right)T_j(\delta), \tag{3.7}$$

$$M_1^{(2)} = \sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\delta}(x_j - x_k - \mu_2)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\delta}(x_j - x_k)\right)}\right)T_j(\pi) \tag{3.8}$$

等を考えることができる．このときやはり $[M_j^{(k)}, M_m^{(n)}] = 0$ $(k, n = 1, 2)$ となる．この視点からでは，元の問題は $\mu_2 = 0$ という特別な場合とみなすことができるというわけである．またこう置くと主役であった Macdonald 作用素と境界条件を決める作用素との区別がなくなり，新たな対称性が現れるという点で興味深い．楕円関数の場合は，もう一つ周期性を持つためそれに対応して同様な可換差分作用素を導入でき結局ランク $3N$ 分の可換差分作用素を構成できるのである．

4 BC_1 型 (野海氏と共同研究)

前節では $3N$ 個の可換差分作用素を構成できることを見たが，本当にすべての可換差分作用素に対して同時固有関数が構成できるかどうかはよく分かっていない．しかし限定された状況ではあるが構成できる，ということをこの節で説明したい．

BC_1 型の場合において，$\tau_1, \tau_2, \mu_0, \ldots, \mu_6 \in \mathbb{C}$ を $\Im\tau_1, \tau_2 > 0$, $2\mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_6 + \tau_1 + \tau_2 = 0$ となるようにとり，差分作用素

$$Y^{(1)} = e^{2\pi i x}\frac{\vartheta(x - \mu_0 + \tau_1; \tau_2)\prod_{j=0}^{6}\vartheta(x - \mu_j; \tau_2)}{\vartheta(2x, 2x + \tau_1; \tau_2)}(T(\tau_1) - 1) + (x \leftrightarrow -x), \tag{4.1}$$

$$Y^{(2)} = e^{2\pi i x}\frac{\vartheta(x - \mu_0 + \tau_2; \tau_1)\prod_{j=0}^{6}\vartheta(x - \mu_j; \tau_1)}{\vartheta(2x, 2x + \tau_2; \tau_1)}(T(\tau_2) - 1) + (x \leftrightarrow -x), \tag{4.2}$$

$$Y^{(3)} = T(1) + T(-1) - 2 \tag{4.3}$$

とおく．ここで $\theta(x; \tau)$ は Jacobi のテータ関数である．これらは可換な差分作用素となる．

Remark 4. ある固有値 $E^{(1)}$ に対して, 固有値問題

$$Y^{(1)}\phi = E^{(1)}\phi \tag{4.4}$$

は, 変数変換により, $E_8^{(1)}$ 楕円差分 Painlevé 方程式の特殊化から得られる楕円超幾何方程式と等しくなる [8].

定理 1. これら差分作用素に対して同時固有関数の一つは以下で与えられる.

$$\phi(c) = \frac{\prod_{i=1}^{7}\Gamma(pqc_0/c_i;p,q)}{\Gamma(pqc_0;p,q)\prod_{1\le i<j\le 7}\Gamma(pqc_0/c_ic_j;p,q)} \times \int_C \frac{\Gamma(pq/(pqc_0)^{1/2}z^{\pm1};p,q)\prod_{j=1}^{7}\Gamma((pqc_0)^{1/2}/c_jz^{\pm1};p,q)}{\Gamma(z^2,z^{-2};p,q)}\frac{dz}{z}. \tag{4.5}$$

このとき固有値は

$$E^{(1)} = e^{-2\pi i\mu_0}\prod_{i=1}^{6}\vartheta(\mu_0+\mu_i;\tau_2), \quad E^{(2)} = e^{-2\pi i\mu_0}\prod_{i=1}^{6}\vartheta(\mu_0+\mu_i;\tau_1), \quad E^{(3)} = 0 \tag{4.6}$$

である. ここで

$$\begin{gathered} c_0 = e^{2\pi i(\mu_0-\mu_1-\tau_1-\tau_2)}, \quad c_1 = e^{2\pi i(\mu_0+\mu_2)}, \quad c_2 = e^{2\pi i(\mu_0+\mu_3)}, \\ c_3 = e^{2\pi i(\mu_0+\mu_4)}, \quad c_4 = e^{2\pi i(\mu_0+\mu_5)}, \quad c_5 = e^{2\pi i(\mu_0+\mu_6)}, \\ c_6 = e^{2\pi i(-x-\mu_1)}, \quad c_7 = e^{2\pi i(x-\mu_1)}, \\ p = e^{2\pi i\tau_1}, \quad q = e^{2\pi i\tau_2} \end{gathered} \tag{4.7}$$

であり, C は原点を回るある適当な路, $\Gamma(z;p,q)$ は楕円ガンマ関数

$$\Gamma(z;p,q) = \frac{(pqz^{-1};p,q)_\infty}{(z;p,q)_\infty} \tag{4.8}$$

である.

(4.5) は楕円超幾何積分とよばれ [19] で詳しく研究されている. 特別な値に対して楕円超幾何積分は有限級数で記述される.

定理 2. ある i に対し $c_i = p^{-M}q^{-N}$ $(M,N\in\mathbb{Z}_{\ge0})$ とおくと,

$$\phi = \tilde{\phi}(c_0,\dots,q^{-N},\dots,c_7;p)\times\tilde{\phi}(c_0,\dots,p^{-M},\dots,c_7;q). \tag{4.9}$$

ここで

$$\tilde{\phi}(c_0,\dots,c_7;r) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle (pq)^{2k}c_0;r\rangle}{\langle c_0;r\rangle}\frac{\langle\!\langle c_0;r\rangle\!\rangle_k}{\langle\!\langle pq;r\rangle\!\rangle_k}\prod_{i=1}^{7}\frac{\langle\!\langle c_i;r\rangle\!\rangle_k}{\langle\!\langle pqc_0/c_i;r\rangle\!\rangle_k}. \tag{4.10}$$

また $\langle\!\langle u;r\rangle\!\rangle_k = \langle u;r\rangle\cdots\langle u(pq)^{k-1};r\rangle$ であり $\langle u;r\rangle$ は *Jacobi* のテータ関数を *multiplicative form* に書いたものである.

これにより楕円超幾何積分は楕円超幾何級数 ${}_{12}V_{11}$ (${}_{10}E_9$ と書いてある文献もある) [3] の拡張になっていることが分かる．楕円超幾何級数とは $|r|<1$ と，ある i に対し $b_i=r^{-N}$ という条件の下,

$$
{}_{12}V_{11}(b_0;b_1,\ldots,b_7;r)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle q^{2k}b_0;r\rangle}{\langle b_0;r\rangle}\frac{\langle b_0;r\rangle_k}{\langle r;r\rangle_k}\prod_{i=1}^{7}\frac{\langle b_i;r\rangle_k}{\langle rb_0/b_i;r\rangle_k} \tag{4.11}
$$

で定義される．ここで $\langle u;r\rangle_k=\langle u;r\rangle\cdots\langle ur^{k-1};r\rangle$ である．

定理 3.

$$
\tilde{\phi}(c_0,\ldots,c_7;p)={}_{12}V_{11}(pc_0;c_1,\ldots,pc_j,\ldots,c_7;p). \tag{4.12}
$$

これは j によらない．

以上より楕円超幾何積分 (4.5) は特別な場合, 楕円超幾何級数の積に分解する．

5 古典 Ruijsenaars 系の可積分性

この節では量子系の可積分性から古典系の可積分性を導く方法について解説する．原理は非常に簡単で, 量子古典対応 $\hbar\to 0$ を用いるものである．具体的には van Diejen は以下を示した．

補題 1 (van Diejen [22]). $\kappa_j\in\mathbb{C}^N$ $(j=1,2)$ とし, $V_j(x,\hbar)$ $(j=1,2)$ を $\hbar$ に関して $\hbar\sim 0$ で正則, x に関して U の近傍で正則と仮定する．ここで U は $\mathbb{R}^N$ の稠密な開集合とする．

$$
\hat{O}_j=V_j(x,\hbar)e^{-\kappa_j\cdot\hat{p}},\qquad(\hat{p}=-i\hbar\partial), \tag{5.1}
$$

$$
O_j=V_j(x,0)e^{-\kappa_j\cdot p} \tag{5.2}
$$

とすると，このとき

$$
[\hat{O}_1,\hat{O}_2]=V_{[1,2]}(x,\hbar)e^{-(\kappa_1+\kappa_2)\cdot\hat{p}}, \tag{5.3}
$$

$$
\{O_1,O_2\}=V_{\{1,2\}}(x)e^{-(\kappa_1+\kappa_2)\cdot p} \tag{5.4}
$$

となる．ここで

$$
\lim_{\hbar\to 0}\frac{V_{[1,2]}(x,\hbar)}{i\hbar}=V_{\{1,2\}}(x). \tag{5.5}
$$

特に

$$
[\hat{O}_1,\hat{O}_2]=0\quad\Longrightarrow\quad\{O_1,O_2\}=0. \tag{5.6}
$$

この補題により, 量子系において可換差分作用素が得られたならば, 差分の $\hat{p}$ を p とし, さらに $\hbar\to 0$ とできればそれは古典系の保存量となる．実際, 量子 Ruijsenaars 系の可換差分作用素の構成法から $\hbar\to 0$ とすることができることが確認できるので, 古典 Ruijsenaars 系の保存量が構成できたことになる．ただし §2 で構成した $3N$ 個の差分作用素のうち上の極限が取れるのは N 個だけであることに注意する．

このようにして N 個の保存量が構成できるのであるが, Calogero 系の場合と異なり differential の一次独立性は明らかなわけではないので示す必要がある．以下これを示す．まず古典系の保存量の leading term に注目する．量子系での構成 [11] から以下が分かる．

定理 4. $\lambda \in P_-$ とする．

$$Y^{\lambda} = \frac{1}{|W_{\lambda}|} \sum_{w \in W} \sum_{\lambda \succeq \lambda'} g^{\lambda}_{\lambda'}(w^{-1}x) e^{-\beta\langle p, w\lambda' \rangle}. \tag{5.7}$$

ここで $g^{\lambda}_{\lambda'}$ は有理型関数で，特に

$$g^{\lambda}_{\lambda}(x) = \prod_{\substack{\alpha \in \Delta_+ \\ \langle -\lambda, \alpha \rangle > 0}} \left(\frac{\sigma(\langle x, \alpha \rangle + \mu_{\alpha})\sigma(\langle x, \alpha \rangle - \mu_{\alpha})}{\sigma(\langle x, \alpha \rangle)\sigma(\langle x, \alpha \rangle)} \right)^{\langle -\lambda, \alpha \rangle / 2} \tag{5.8}$$

であり，$\lambda, \lambda' \in P_-$ に対し，$\lambda \succeq \lambda' \iff \ell(\tau_{\lambda}) > \ell(\tau_{\lambda'})$ または $\lambda = \lambda'$．

この構造に着目すると一次独立性を示すことができる．

定理 5. *fundamental coweight* λ_i に対して

$$dY^{-\lambda_1}, \ldots, dY^{-\lambda_N} \tag{5.9}$$

は稠密な部分集合上で一次独立．

証明. 一般に

$$dY^{\lambda} = \langle f_{\lambda}(x,p), dp \rangle + \langle g_{\lambda}(x,p), dx \rangle \tag{5.10}$$

とおいて $\det\langle f_{-\lambda_i}, \alpha_j \rangle_{ij}$ が恒等的に 0 でないことを示す．

$$f_{\lambda} = \frac{1}{|W_{\lambda}|} \sum_{w \in W} \sum_{\lambda \succeq \lambda'} g^{\lambda}_{\lambda'}(w^{-1}x) e^{-\beta\langle p, w\lambda' \rangle}(-\beta w \lambda') \tag{5.11}$$

であるから，$\langle f_{-\lambda_i}, \alpha_j \rangle$ $(j = 1, \ldots, N)$ の中で $e^{\beta\langle p, \lambda_i \rangle}$ の項を持つのは $i = j$ のときのみである．$\rho = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j$ とすると

$$\prod_{j=1}^{N} e^{\beta\langle p, \lambda_j \rangle} = e^{\beta\langle p, \rho \rangle} \tag{5.12}$$

は命題 1 で示すようにこの積の形しかないので

$$\begin{aligned} \det\langle f_{-\lambda_i}, \alpha_j \rangle_{ij} &= \begin{vmatrix} a_{\lambda_1} e^{\beta\langle p, \lambda_1 \rangle} + * & \cdots & * \\ * & \cdots & * \\ * & \cdots & a_{\lambda_N} e^{\beta\langle p, \lambda_N \rangle} + * \end{vmatrix} \\ &= \left(\prod_{j=1}^{N} a_{\lambda_j} \right) e^{\beta\langle p, \rho \rangle} + *. \end{aligned} \tag{5.13}$$

したがって恒等的に 0 ではない． □

以上より次の命題を示せばよいことが分かる．

命題 1. $\lambda'_j \in P_+$ を $-\lambda_j \succeq -\lambda'_j$ となるものとし，また $w_j \in W$ $(j = 1, \ldots, N)$ とする．このとき

$$\rho = \sum_{j=1}^{N} w_j \lambda'_j \tag{5.14}$$

となるのは $w_j \lambda'_j = \lambda_j$ のときに限る．

証明. 二段階に分けて証明する.

まず $\lambda'_j = \lambda_j$ であることを示す. reduced expression の性質より, 長さに関する不等式

$$
\begin{aligned}
\ell(\tau_{-\rho}) &= \ell(\tau_{-\sum_{j=1}^{N}\lambda_j}) = \sum_{j=1}^{N}\ell(\tau_{-\lambda_j}) \\
&\geq \sum_{j=1}^{N}\ell(\tau_{-\lambda'_j}) = \sum_{j=1}^{N}\ell(\tau_{-w_j\lambda'_j}) \\
&\geq \ell(\tau_{-\sum_{j=1}^{N}w_j\lambda'_j})
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

が得られるが, 条件よりすべて等号でなくてはいけない. したがって

$$
\ell(\tau_{-\lambda_j}) = \ell(\tau_{-\lambda'_j}) \tag{5.16}
$$

であること, すなわち $-\lambda_j \succeq -\lambda'_j$ より $\lambda_j = \lambda'_j$ であることが必要である.

次に $w_j\lambda'_j = \lambda_j$ であることを示す.

$$
W\lambda_j \subset \lambda_j - Q_+ \tag{5.17}
$$

であるから,

$$
w_j\lambda_j = \lambda_j - \nu_j, \qquad (\nu_j \in Q_+) \tag{5.18}
$$

とおくと

$$
\sum_{j=1}^{N} w_j\lambda_j = \sum_{j=1}^{N}\lambda_j - \sum_{j=1}^{N}\nu_j \tag{5.19}
$$

より $\sum_{j=1}^{N}\nu_j = 0$ でなくてはいけない. したがって $\nu_j = 0$ $(j = 1, \ldots, N)$ であるから $w_j\lambda_j = \lambda_j$ であり, 結局 $w_j\lambda'_j = \lambda_j$ である. □

参考文献

[1] I. Cherednik, *Elliptic quantum many-body problem and double affine Knizhnik-Zamolodchikov equation*, Commun. Math. Phys. **169** (1995), 441–461.

[2] ———, *Double affine hecke algebras*, no. 319, London Mathematical Society, 2005.

[3] I. B. Frenkel and V. Turaev, *Elliptic solutions of the Yang-Baxter equation and modular hypergeometric functions*, The Arnold-Gelfand mathematical seminars, Birkhauser, 1997, pp. 171–204.

[4] K. Hasegawa, *Ruijsenaars' commuting difference operators as commuting transfer matrices*, Commun. Math. Phys. **187** (1997), 289–325.

[5] K. Hasegawa, T. Ikeda, and T. Kikuchi, *Commuting difference operators arising from the elliptic $C_2^{(1)}$-face model*, J. Math. Phys. **40** (1999), 4549–4568, math.QA/9810062.

[6] V. I. Inozemtsev, *Lax representation with spectral parameter on a torus for integrable particle systems*, Lett. Math. Phys. **17** (1989), 11–17.

[7] S. P. Khastgir and R. Sasaki, *Liouville integrability of classical Calogero-Moser models*, Phys. Lett. A **279** (2001), 189–193, hep-th/0005278.

[8] K.Kajiwara, T.Masuda, M.Noumi, Y.Ohta, and Y.Yamada, ${}_{10}E_9$ *solution to the elliptic Painlevé equation*, J. Phys. A. **36** (2003), L263–L272, nlin.SI/0303032.

[9] Y. Komori, *Elliptic Ruijsenaars operators and elliptic hypergeometric integrals*, RIMS kokyuroku, to appear.

[10] ———, *Essential self-adjointness of the elliptic Ruijsenaars models*, J. Math. Phys. **42** (2001), 4523–4553.

[11] ———, *Ruijsenaars' commuting difference operators and invariant subspace spanned by theta functions*, J. Math. Phys. **42** (2001), 4503–4522.

[12] Y. Komori and K. Hikami, *Quantum integrability of the generalized elliptic Ruijsenaars models*, J. Phys. A **30** (1997), 4341–4364.

[13] ———, *Conserved operators of the generalized elliptic Ruijsenaars models*, J. Math. Phys. **39** (1998), 6175–6190.

[14] S. N. M. Ruijsenaars (notes by Yasushi Komori), *Elliptic integrable systems of calogero-moser type: A survey*, Rokko Lectures in Mathematics, 2005, to appear.

[15] H. Ochiai, T. Oshima, and H. Sekiguchi, *Commuting families of symmetric differential operators*, Proc. Japan. Acad. **70** (1994), 62–66.

[16] M. A. Olshanetsky and A. M. Perelomov, *Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras*, Phys. Rep. **71** (1981), 313–400.

[17] T. Oshima, *Completely integrable systems with a symmetry in coordinates*, Asian J. Math. **2** (1998), 935–955, preprint, UTMS 94–6, Dept. of Mathematical Science, University of Tokyo, 1994.

[18] T. Oshima and H. Sekiguchi, *Commuting families of differential operators invariant under the action of a Weyl group*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **2** (1995), 1–75, preprint, UTMS 93–43, Dept. of Mathematical Science, University of Tokyo, 1993.

[19] E. M. Rains, *Transformations of elliptic hypergeometric integrals*, (2003), math.QA/0309252.

[20] S. N. M. Ruijsenaars, *Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities*, Commun. Math. Phys. **110** (1987), 191–213.

[21] S. N. M. Ruijsenaars and H. Schneider, *A new class of integrable systems and its relation to solitons*, Ann. Phys. **170** (1986), 370–405.

[22] J. F. van Diejen, *Integrability of difference Calogero-Moser systems*, J. Math. Phys. **35** (1994), 2983–2998.